

ผลการเรียนรู้

แก้สมการเอกซ์โพเนนเชียล และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

สาระสำคัญ

สมการที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง เรียกว่า “สมการเอกซ์โพเนนเชียล”

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก \mathbb{R} ไปทั่วถึง \mathbb{R}^+ จากสมบัติของฟังก์ชัน 1-1 จะได้ว่า

เมื่อ a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a > 0$ และ $a \neq 1$ $a^x = a^y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียล

สาระการเรียนรู้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาเซตคำตอบของสมการ $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 625$

วิธีทำ เนื่องจาก $625 = 5^4 = \frac{1}{5^{-4}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$
 จะได้ $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$
 เนื่องจาก $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ เป็นฟังก์ชัน 1-1
 จะได้ $x = -4$
 ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\{-4\}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาเซตคำตอบของสมการ $\left(\frac{49}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{3}{2}}$

วิธีทำ จาก $\left(\frac{49}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{3}{2}}$
 จะได้ $\left(\left(\frac{7}{3}\right)^2\right)^x = \left(\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$\left(\frac{7}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

เนื่องจาก $f(x) = \left(\frac{7}{3}\right)^x$ เป็นฟังก์ชัน 1-1

$$\text{จะได้ } 2x = -\frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาเซตคำตอบของสมการ $(\sqrt{2})^{2x-4} = 8^x$

วิธีทำ เนื่องจาก $(\sqrt{2})^{2x-4} = \left((2)^{\frac{1}{2}}\right)^{2x-4} = 2^{\frac{2x-4}{2}}$

$$\text{และ } 8^x = (2^3)^x = 2^{3x}$$

$$\text{จะได้ } 2^{\frac{2x-4}{2}} = 2^{3x}$$

เนื่องจาก $f(x) = 2^x$ เป็นฟังก์ชัน 1-1

$$\text{จะได้ } \frac{2x-4}{2} = 3x$$

$$x = -1$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\{-1\}$

ตัวอย่างเพิ่มเติม

1) จงหาเซตคำตอบของสมการ $2^{x+1} + 2^x - 2^{x-1} = 40$

วิธีทำ จาก $2^{x+1} + 2^x - 2^{x-1} = 40$

$$2 \times 2^x + 2^x - \frac{2^x}{2} = 40$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)2^x = 40$$

$$2^x = 40 \times \frac{2}{5}$$

$$2^x = 16$$

$$2^x = 2^4$$

เนื่องจาก $f(x) = 2^x$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 จะได้ $x = 4$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\{4\}$

2) จงหาเซตคำตอบของสมการ $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 155\sqrt{5}$

วิธีทำ จาก $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 155\sqrt{5}$

$$5^x + 5 \times 5^x + 5^2 \times 5^x = 155\sqrt{5}$$

$$(1 + 5 + 5^2)5^x = 155\sqrt{5}$$

$$31 \times 5^x = 155\sqrt{5}$$

$$5^x = \frac{155\sqrt{5}}{31}$$

$$5^x = 5^1 \times 5^{\frac{1}{2}}$$

$$5^x = 5^{\frac{3}{2}}$$

เนื่องจาก $f(x) = 5^x$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 จะได้ $x = \frac{3}{2}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูยกตัวอย่างการแก้สมการโดยใช้คำสั่ง solve ในเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz ในการแก้สมการ $3x+1=7$ ดังนี้

1.1 กดปุ่ม **MENU**

1.2 เลือก Menu 1 : Calculate กด **1**

1.3 พิมพ์สมการ $3x+1=7$ โดยกดตามลำดับ

ดังนี้ **3** **x** **+** **1** **ALPHA** **CALC** **7**

1.4 หลังจากนั้นให้กด **SHIFT** **CALC**

1.5 จากนั้นกดเครื่องหมาย **=**

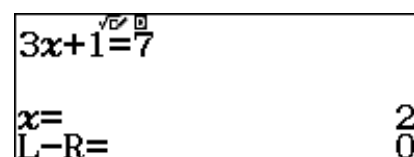
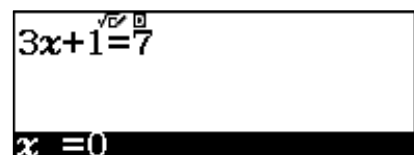
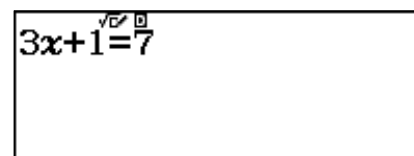
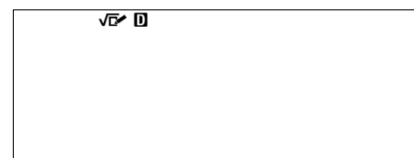
หน้าจอจะแสดงคำตอบของสมการดังนี้

1.6 จะได้ 2 เป็นคำตอบของสมการ $3x+1=7$

2. ครูทบทวนเรื่องฟังก์ชัน 1-1 โดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบาย ครูทบทวนว่าสมการที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง เรียกว่า “สมการเอกซ์โพเนนเชียล”

3. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 7 แก้อย่างไร โดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991 EX Classwiz เพื่อหาค่าในแต่ละข้อ แล้วบันทึกค่าที่ได้ลงในตาราง (ขั้นการสำรวจ)

4. ครูให้นักเรียนสังเกตค่าของ x ที่ได้ จากนั้นครูนำนักเรียนอภิปรายเพื่อให้ได้ข้อสรุปในการหาคำตอบของสมการเอกซ์โพเนนเชียล (ขั้นการหาความสัมพันธ์)



5. ครูกับนักเรียนร่วมกันสรุปการหาคำตอบของสมการเอกซ์โพเนนเชียล ดังนี้ (ขั้นการสรุปความสัมพันธ์)

- 1) เมื่อ a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a > 0$ และ $a \neq 1$ จะได้ว่า $a^x = a^y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$
- 2) จากข้อสรุปในข้อ 1 จะได้ว่าถ้าต้องการแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียล สามารถทำได้โดยทำทั้งสองข้างของสมการให้อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีฐานเท่ากัน จากนั้น กำหนดให้เลขชี้กำลังของเลขยกกำลังทั้งสองข้างของสมการเท่ากัน และแก้สมการเพื่อหาคำตอบ

6. ครูกับนักเรียนร่วมกันแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียลจากตัวอย่างที่ 1- 3 โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณ วิทยาศาสตร์ จากนั้นใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991Ex Classwiz ในการตรวจคำตอบ โดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบาย (ขั้นการฝึกทักษะ)

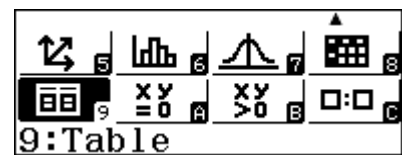
7. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 7 เมื่อนักเรียนทำเสร็จเรียบร้อยแล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ

8. ครูยกตัวอย่างเพิ่มเติม และให้นักเรียนแก้สมการโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ โดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบายเพื่อตรวจสอบความเข้าใจ

9. ครูให้นักเรียนพิจารณาเซตคำตอบของสมการ $1^x = 1^{100}$ ว่าคือ $\{100\}$ หรือไม่ (ขั้นการแสดงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน) จากนั้นครูให้นักเรียนตรวจสอบเซตคำตอบของสมการดังกล่าวโดยใช้ Menu Table ในเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz โดยกำหนด $f(x) = 1^x$ และ $g(x) = 1^{100}$ และพิจารณาค่าของ x ที่ทำให้ $f(x) = g(x)$ ดังนี้

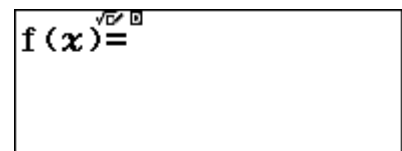
9.1 เข้าสู่ Menu Table

กด **[MENU]** **[9]**

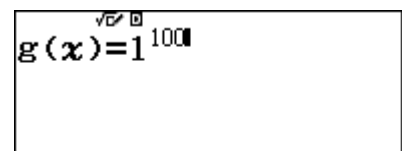
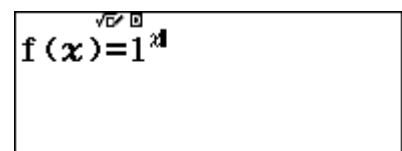


9.2 กำหนดค่าฟังก์ชัน $f(x) = 1^x$ และ $g(x) = 1^{100}$

กด **[1]** **[x^y]** **[x]** **[=]**



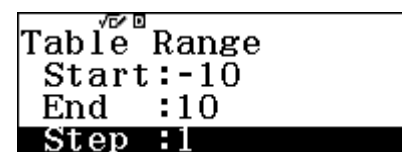
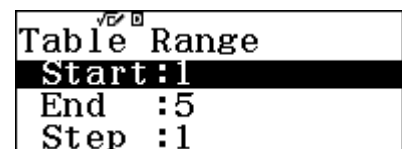
จากนั้นกด **[1]** **[x^y]** **[1]** **[0]** **[0]** **[=]**



9.3 กำหนดค่า Table Range

ให้ Start : -10, End : 10, Step : 1 ตามลำดับ


กด **[(-)]** **[1]** **[0]** **[=]** **[1]** **[0]** **[=]** **[1]** **[=]** **[=]**



9.4 เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO

รุ่น fx-991Ex Classwiz จะแสดงผล

กด   เพื่อดูค่า $f(x)$ และ $g(x)$

√  D			
	x	f(x)	g(x)
1	-10	1	1
2	-9	1	1
3	-8	1	1
4	-7	1	1

-10

นักเรียนจะพบว่าเมื่อแทนค่า x เป็นจำนวนจริงใดก็ตามค่าของ $f(x) = g(x)$ เสมอ

ดังนั้นเซตคำตอบของสมการ คือ เซตของจำนวนจริง

10. ครูและนักเรียนอภิปรายร่วมกันว่าเหตุใดจึงเป็นเช่นนั้น

หมายเหตุ เนื่องจาก $f(x) = 1^x$ ไม่ใช่ฟังก์ชัน 1-1 สมการ $1^x = 1^{100}$ จึงมีคำตอบได้มากกว่า 1 คำตอบ

11. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อหาข้อสรุปความหมายของสมการเอกซ์โพเนนเชียล และขั้นตอนการแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียล

สื่อการเรียนรู้/แหล่งเรียนรู้

1. ใบกิจกรรมที่ 7 แก้อย่างไร
2. แบบฝึกทักษะที่ 7 เรื่อง สมการเอกซ์โพเนนเชียล
3. เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz

การวัดและการประเมินผล

1. ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 7 แก้อย่างไร
2. ประเมินจากการทำแบบฝึกทักษะที่ 7 เรื่อง สมการเอกซ์โพเนนเชียล
3. ประเมินจากการตอบคำถามในชั้นเรียน

ใบกิจกรรมที่ 7

แก้อย่างไร

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้คำสั่ง Solve ในเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เพื่อหาค่าของ x ในแต่ละข้อ

ข้อ	สมการ	คำตอบของสมการคือ
1	$2^x = 2^{10}$	
2	$3^x = 3^7$	
3	$2^x = 2^0$	
4	$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	
5	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{3}{2}}$	
6	$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$	
7	$2^x = 8$	
8	$27^x = 81$	

จากตารางข้างต้นสามารถสรุปได้ดังนี้

เมื่อ a เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a > 0$ และ $a \neq 1$ จะได้ว่า $a^x = a^y$ ก็ต่อเมื่อ.....

แบบฝึกทักษะที่ 7

เรื่อง สมการเอกซ์โพเนนเชียล

คำชี้แจง จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ เมื่อเสร็จแต่ละข้อแล้ว สามารถตรวจสอบคำตอบโดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ได้

1) $3^x = 3^{2x+1}$

.....

.....

.....

.....

ตรวจสอบคำตอบโดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ พบว่าคำตอบที่ได้.....

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ.....

2) $7^{x-3} = 1$

.....

.....

.....

.....

ตรวจสอบคำตอบโดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ พบว่าคำตอบที่ได้.....

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ.....

3) $3^{6-x} = \sqrt{27}$

.....

.....

.....

.....

ตรวจสอบคำตอบโดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ พบว่าคำตอบที่ได้.....

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ.....

$$4) 5^{2x+1} = 25^x \cdot 5^{3x}$$

.....

.....

.....

.....

ตรวจสอบคำตอบโดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ พบว่าคำตอบที่ได้.....

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ.....

$$5) 2^{x(x-2)} = 4$$

.....

.....

.....

.....

ตรวจสอบคำตอบโดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ พบว่าคำตอบที่ได้.....

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ.....

$$6) 3^{x(x+4)} = \frac{1}{81}$$

.....

.....

.....

.....

ตรวจสอบคำตอบโดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ พบว่าคำตอบที่ได้.....

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ.....

$$7) 3^x = 9^{x+1} \cdot 27^{1-2x}$$

.....

.....

.....

.....

ตรวจสอบคำตอบโดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ พบว่าคำตอบที่ได้.....

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ.....

$$8) \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{8}{27}\right)^{-3}$$

.....

.....

.....

.....

ตรวจสอบคำตอบโดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ พบว่าคำตอบที่ได้.....

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ.....